49　数列の応用

407

(1)

正三角形 ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}\sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

または，$\Delta\mathrm{ABC}=\Delta\mathrm{O_1AB}+\Delta\mathrm{O_1BC}+\Delta\mathrm{O_1CA}$ より，

$$S=\frac{1}{2}r_1\cdot \mathrm{AB}+\frac{1}{2}r_1\cdot \mathrm{BC}+\frac{1}{2}r_1\cdot \mathrm{CA}$$
$$=\frac{1}{2}r_1(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$$
$$=\frac{1}{2}r_1(1+1+1)$$
$$=\frac{3}{2}r_1$$

よって，$\frac{3}{2}r_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$ より，$r_1=\frac{\sqrt{3}}{6}$

(2)

次図より，

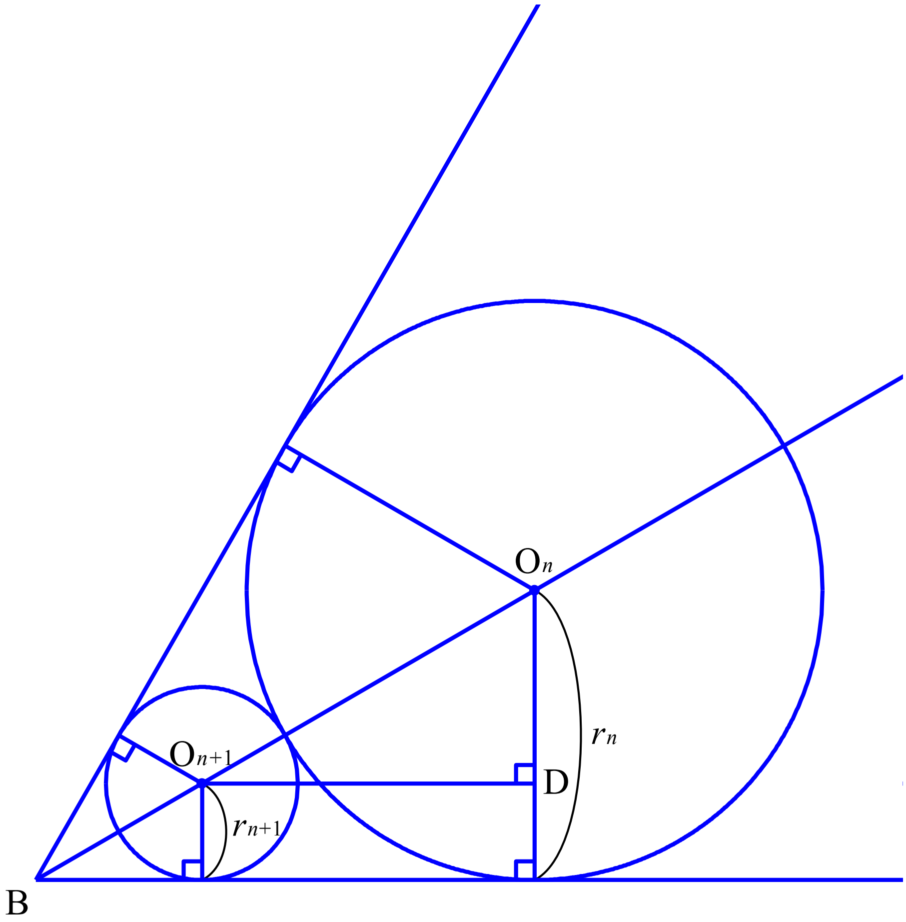
$\mathrm{O}_n\mathrm{D}=\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\sin\angle \mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{D}$　・・・①

$\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}=r_n+r_{n+1}$　・・・②

$\mathrm{O}_n\mathrm{D}=r_n-r_{n+1}$　・・・③

円の 2 辺 AB, AC に接する円の中心と頂点 B を結ぶ線分は正三角形 ABC の∠B の二等分線だから，$\angle \mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{D}=30^\circ$　・・・④

よって，①～④より，$r_n-r_{n+1}=(r_n+r_{n+1})\cdot\frac{1}{2}$　$\therefore r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$



(3)

(1)，(3)より，r_n は初項 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。

よって，$r_n=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}\pi {r_k}^2\\
&=\pi\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}^2\\
&=\frac{\pi}{12}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\\
&=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{32}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}\pi
\end{aligned}
$$

408

(1)

$A \xrightarrow{\frac{2}{3}} A$ より，$p_1 = \dfrac{2}{3}$　・・・(答)

$A \xrightarrow{\frac{2}{3}} A \xrightarrow{\frac{2}{3}} A$ または $A \xrightarrow{\frac{1}{6}} B \xrightarrow{\frac{1}{6}} A$ または $A \xrightarrow{\frac{1}{6}} C \xrightarrow{\frac{1}{6}} A$ より，

$p_2 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$　・・・(答)

(2)

n 分後に頂点 B 上にある確率を q_n とすると，

n 分後に頂点 C 上にある確率は $1 - p_n - q_n$ である。

したがって，

n 分後に頂点 A 上にあるとき

　$n+1$ 分後に頂点 A 上にある確率は $\dfrac{2}{3} p_n$

n 分後に頂点 B 上にあるとき

　$n+1$ 分後に頂点 A 上にある確率は $\dfrac{1}{6} q_n$

n 分後に頂点 C 上にあるとき

　$n+1$ 分後に頂点 A 上にある確率は $\dfrac{1}{6}(1 - p_n - q_n)$

より，

$$p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{6} q_n + \frac{1}{6}(1 - p_n - q_n) = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{6}$$

(3)

$p_{n+1} = \dfrac{1}{2} p_n + \dfrac{1}{6}$ より，$p_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}\left(p_n - \dfrac{1}{3}\right)$

よって，$p_n - \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(p_0 - \dfrac{1}{3}\right)$

これと $p_0 = 1$ より，$p_n = \dfrac{1}{3}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

409

(1)

$a_{n+1}=2a_n-1$ より，$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

よって，$a_n-1=2^{n-1}(a_1-1)$

これと $a_1=2$ より，$a_n=2^{n-1}+1$

(2)

$a_n{}^2-2a_n>10^{15}$

$a_n{}^2-2a_n=(a_n-1)^2-1=\left(2^{n-1}\right)^2-1=4^{n-1}-1$

より，

$4^{n-1}-1>10^{15}$　すなわち $4^{n-1}>10^{15}+1$　・・・①

$n=1$ のとき

①は成り立たない。

$n\geq 2$ のとき

①より，$4^{n-1}>10^{15}$　・・・②

また，4^{n-1} の 1 の位の数は 4, 6, 4, 6, $\cdots$ 4 と交互に繰り返される。

したがって，②を満たす n は $4^{n-1}\geq 10^{15}+4$ も満たす。

よって，①を満たす n の最小値と②を満たす n の最小値は等しい。

そこで，②を満たす n の最小値を求める。

②の両辺の常用対数をとると $2(n-1)\log_{10}2>15$　$\therefore n>\dfrac{15}{2\log_{10}2}+1$

ここで，$\dfrac{15}{2\log_{10}2}+1$ について，

$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ より，$\dfrac{15}{2\cdot 0.3011}+1<\dfrac{15}{2\log_{10}2}+1<\dfrac{15}{2\cdot 0.3010}+1$

これより，$25.9<\dfrac{15}{2\log_{10}2}+1<26$

よって，$n\geq 26$

ゆえに，求める最小の自然数 n は 26

410

(1)

$$a_{n+1}{}^2+b_{n+1}{}^2=\left(\frac{1}{4}a_n-\frac{\sqrt{3}}{4}b_n\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\left(a_n{}^2+b_n{}^2\right)$$

より，$a_n{}^2+b_n{}^2=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(a_1{}^2+b_1{}^2\right)$

これと，$a_1=1$，$b_1=0$ より，

$$a_n{}^2+b_n{}^2=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}\right|=\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2)

なす角を θ $(0\le\theta\le\pi)$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}_{n+1}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}_{n+1}}\right|}$$
$$=\frac{a_na_{n+1}+b_nb_{n+1}}{\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}\sqrt{a_{n+1}{}^2+b_{n+1}{}^2}}$$
$$=\frac{a_n\left(\frac{1}{2}a_n-\frac{\sqrt{3}}{4}b_n\right)+b_n\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\right)}{\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}\sqrt{a_{n+1}{}^2+b_{n+1}{}^2}}$$
$$=\frac{a_n{}^2+b_n{}^2}{4\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}\sqrt{a_{n+1}{}^2+b_{n+1}{}^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}}{4\sqrt{a_{n+1}{}^2+b_{n+1}{}^2}}$$
$$=\frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

よって，$\theta=\frac{\pi}{3}$

(3)

$S_n \leq \dfrac{1}{2^{2013}}$ において，

$$S_n = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}_{n+1}}\right|\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$\frac{1}{2^{2013}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2013}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2012}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{1006}$$

より，

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1006}$ すなわち $4^{n-1006} \geq \sqrt{3}$

よって， $n \geq 1007$

ゆえに， $S_n \leq \dfrac{1}{2^{2013}}$ を満たす最小の自然数 n は 1007

411

(1)

n 回目に B が投げる確率を b_n とすると，

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n$ ・・・①

$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n$ ・・・②

①－②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{6}(a_n-b_n)$ $\therefore a_n-b_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}(a_1-b_1)$

$a_1=1$，$b_1=0$ だから，$\therefore a_n-b_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ ・・・③

①＋②より，$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{5}{6}(a_n+b_n)$

よって，上と同様にして，$a_n+b_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ ・・・④

③と④の連立方程式を解くことにより，$a_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}$

(2)

n 回目に A が投げ，且つ 6 の目が出ればよいから，$p_n=\frac{1}{6}a_n$

よって，$p_n=\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}$

(3)

$$\begin{aligned}q_n&=\sum_{k=1}^{n}p_k\\&=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{1}{12}\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n}}{1-\frac{1}{6}}+\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}{1-\frac{5}{6}}\right\}\\&=\frac{1}{10}\left\{6-\left(\frac{1}{6}\right)^{n}-5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}\end{aligned}$$

412

n 両編成の列車において，条件を満たす塗り方の数を a_n 通りとする。

解法 1　先頭車両の色で分類

列車が $n+2$ 両編成のとき

先頭車両が赤のとき

後続の $n+1$ 両が条件を満たせばよいから， a_{n+1} 通り。

先頭車両が青のとき

2 両目は赤だから，その後続の n 両が条件を満たせばよい。よって， a_n 通り。

先頭車両が黄色のとき

先頭車両が青のときと同じだから， a_n 通り。

よって， $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$

これより， $a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$， $a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$

$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$ の場合

$a_{n+1}+a_n=2^{n-2}(a_3+a_2)$

これと $a_2=5$， $a_3=11$ より， $a_{n+1}+a_n=16\cdot 2^{n-2}$　すなわち $a_{n+1}+a_n=2^{n+2}$　・・・①

$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$ の場合

$a_{n+1}-2a_n=(-1)^{n-2}(a_3-2a_2)$ より， $a_{n+1}-2a_n=(-1)^{n-2}$

これと $1=(-1)^2$ より， $a_{n+1}-2a_n=(-1)^n$　・・・②

①と②の連立方程式を解くことにより， $a_n=\frac{1}{3}\left\{2^{n+2}-(-1)^n\right\}$

補足

a_2

$R-\begin{pmatrix}R\\B\\Y\end{pmatrix}$， $B-R$， $Y-R$ より， $a_2=5$

a_3

$R-R-\begin{pmatrix}R\\B\\Y\end{pmatrix}$， $R-B-R$， $R-Y-R$， $B-R-\begin{pmatrix}R\\B\\Y\end{pmatrix}$， $Y-R-\begin{pmatrix}R\\B\\Y\end{pmatrix}$ より， $a_3=11$

解法 2　最後尾車両の色で分類

a_n のうち，最後尾車両の色が赤，青，黄である場合の数をそれぞれ r_n，b_n，y_n とすると，

$a_n = r_n + b_n + y_n$　・・・①

r_{n+1} について

条件を満たす塗り方のうち，n 両目が赤または青または黄であればよいから，

$r_{n+1} = r_n + b_n + y_n$　・・・②

b_{n+1} について

条件を満たす塗り方のうち，n 両目が赤であればよいから，$b_{n+1} = r_n$　・・・③

y_{n+1} について

③と同様，$y_{n+1} = r_n$　・・・④

②より，$r_{n+2} = r_{n+1} + b_{n+1} + y_{n+1}$

これに③，④を代入することにより，$r_{n+2} = r_{n+1} + 2r_n$

これより，$r_{n+2} + r_{n+1} = 2(r_{n+1} + r_n)$，$r_{n+2} - 2r_{n+1} = -(r_{n+1} - 2r_n)$

$r_{n+2} + r_{n+1} = 2(r_{n+1} + r_n)$ の場合

$r_{n+1} + r_n = 2^{n-2}(r_3 + r_2)$

これと $r_2 = 3$，$r_3 = 5$ より，$r_{n+1} + r_n = 2^{n+1}$　・・・⑤

$r_{n+2} - 2r_{n+1} = -(r_{n+1} - 2r_n)$ の場合

$r_{n+1} - 2r_n = (-1)^{n-2}(r_3 - 2r_2)$ より，$r_{n+1} - 2r_n = (-1)^{n-1}$　・・・⑥

⑤と⑥の連立方程式を解くことにより，$r_n = \dfrac{1}{3}\left\{2^{n+1} - (-1)^{n-1}\right\}$

ここで，①，②より，$a_n = r_{n+1}$

よって，$a_n = \dfrac{1}{3}\left\{2^{n+2} - (-1)^n\right\}$

補足

r_2

$\begin{pmatrix} R \\ B \\ Y \end{pmatrix} - R$ より，$r_2 = 3$

r_3

$\begin{pmatrix} R \\ B \\ Y \end{pmatrix} - R - R$，$R - B - R$，$R - Y - R$ より，$r_3 = 5$

413

(1)

x^{n+1} を x^2-x-1 で割ったときの商を $p_n(x)$ とすると，$x^{n+1}=(x^2-x-1)p_n(x)+a_nx+b_n$

これより，

$$\begin{aligned}x^{n+2}&=x\cdot x^{n+1}\\&=x(x^2-x-1)p_n(x)+a_nx^2+b_nx\\&=x(x^2-x-1)p_n(x)+a_n(x^2-x-1)+(a_n+b_n)x+a_n\\&=(x^2-x-1)\{xp_n(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+a_n\end{aligned}$$

また，$x^{n+2}=(x^2-x-1)p_{n+1}(x)+a_{n+1}x+b_{n+1}$

よって，$p_{n+1}(x)=xp_n(x)+a_n$，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+b_n\\b_{n+1}=a_n\end{cases}$ を満たす。

(2)

a_n，b_n はともに正の整数であることの証明

(i) $n=1$ のとき

$x^2=(x^2-x-1)\cdot 1+x+1$ より，$a_1=1$，$b_1=1$

よって，a_n，b_n はともに正の整数である。

(ii) $n=k$ のとき a_n，b_n はともに正の整数であると仮定する。

(1)より，$a_{k+1}=a_k+b_k$，$b_{k+1}=a_k$ より，a_{k+1}，b_{k+1} はともに正の整数である。

よって，$n=k+1$ のときも a_n，b_n はともに正の整数である。

(i)，(ii)より，すべての n に対し，a_n，b_n はともに正の整数である。

a_n と b_n が互いに素であることの証明

(i) $n=1$ のとき

$x^2=(x^2-x-1)\cdot 1+x+1$ より，$a_1=1$，$b_1=1$

よって，a_n と b_n は互いに素である。

(ii) $n=k$ のとき a_n と b_n が互いに素であると仮定する。

(1)より，$\begin{cases}a_k=b_{k+1}\\b_k=a_{k+1}-b_{k+1}\end{cases}$ ・・・①

a_{k+1} と b_{k+1} の最大公約数を g とすると，①より，a_k，b_k はともに g を約数にもつ。

すなわち，g は a_k と b_k の公約数である。

これと仮定より，$g=1$

よって，a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素であり，

これは $n=k+1$ のときも a_n と b_n が互いに素であることを示している。

(i)，(ii)より，すべての n に対し，a_n と b_n は互いに素である。